Cevap Anahtarı

1) a) S_n de çift permütasyonların kümesi A_n olmak üzere $A_n \leq S_n$ olduğunu gösterelim.

Birim permütasyon I, çift olduğundan $I \in A_n$ dir. Yani $A_n \neq \emptyset$. Ayrıca tanımı gereği $A_n \subseteq S_n$ dir.

$\forall f, g \in A_n$ için f ve g çift sayıda ikili devrim çarpımı olduğundan fg de çift sayıda ikili devrim çarpımı olur. O halde $fg \in A_n$ dir. Bu durumda A_n sonlu S_n grubunun çarpımsal kapalı bir alt kümesidir. İlgili teoreme göre $A_n \leq S_n$ dir.

b) S_6 da $\alpha = (4\ 6)(1\ 5)(1\ 2)(1\ 3)$ verilsin.

$\alpha = (1\ 3\ 2\ 5)(4\ 6)$ olarak ayrık devirlerine ayrılır.

O halde α'nın mertebesi ekok $(4,2) = 4$ dür.

$M(\alpha) = \{\beta \in S_6 \mid \beta\alpha\beta^{-1} = \alpha\}$

$$\beta(\alpha)\beta^{-1} = \alpha \Rightarrow (\beta(1)\beta(3)\beta(2)\beta(5))(\beta(4)\beta(6)) = (1\ 3\ 2\ 5)(4\ 6)$$
$$= (1\ 3\ 2\ 5)(6\ 4)$$
$$= (3\ 2\ 5\ 1)(4\ 6)$$
$$= (3\ 2\ 5\ 1)(6\ 4)$$
$$= (2\ 5\ 1\ 3)(4\ 6)$$
$$= (2\ 5\ 1\ 3)(6\ 4)$$
$$= (5\ 1\ 3\ 2)(4\ 6)$$
$$= (5\ 1\ 3\ 2)(6\ 4)$$

$M(\alpha) = \{I, (4\ 6), (1\ 3\ 2\ 5), (1\ 3\ 2\ 5)(4\ 6), (1\ 2)(3\ 5), (1\ 2)(3\ 5)(4\ 6), (1\ 5\ 2\ 3), (1\ 5\ 2\ 3)(4\ 6)\}$ 8 elemanlı olarak bulunur.

2) $f: K \longrightarrow KL/L$ dönüşümünü $\forall k \in K$ için

$f(k) = klL = kL$ ile tanımlayalım.

Kapalılık: $\forall k \in K$ için $f(k) = klL \in KL/L$ olup f kapalıdır.

İyi tanımlılık: $\left.\begin{array}{l}\forall k_1, k_2 \in K \text{ için} \\ k_1 = k_2 \text{ olsun.}\end{array}\right\}$ $f(k_1) = k_1 L = k_2 L = f(k_2)$ olup

f iyi tanımlıdır. O halde f bir fonksiyondur.

Homomorfizma: $\forall k_1, k_2 \in K$ için $f(k_1 k_2) = (k_1 k_2)L$

$$= (k_1 L)(k_2 L)$$
$$= f(k_1) f(k_2) \text{ olup.}$$

f homomorfizmadır.

Örtenlik: $\forall klL \in KL/L$ için $k \in K$ olup $\forall klL = kL \in KL/L$ için

$f(k) = kL$ oş $\exists k \in K$ olduğundan f örtendir.

1. izomorfizma (Homomorfizma) teoremine göre

$K/\text{Çek} f \cong KL/L$ elde edilir. O halde Çek$f$'i

bulalım.

$$\text{Çek} f = \{k \in K \mid f(k) = 0_{KL/L}\}$$
$$= \{k \in K \mid kL = L\}$$
$$= \{k \in K \mid k \in L\}$$
$$= \{k \in K \mid k \in K \cap L\} = K \cap L \text{ olup}$$

$K/K \cap L \cong KL/L$ elde edilir.

3) a) $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $4^{3n+1} + 13^{n+1} = (4^3)^n \cdot 4 + 13^n \cdot 13$ olup

$4^3 \equiv 13\ (17)$ olduğundan
$$4^{3n+1} + 13^{n+1} \equiv 13^n \cdot 4 + 13^n \cdot 13\ (17)$$
$$4^{3n+1} + 13^{n+1} \equiv 13^n (4 + 13)\ (17)$$
$$4^{3n+1} + 13^{n+1} \equiv 13^n \cdot 17\ (17)$$
$$4^{3n+1} + 13^{n+1} \equiv 0\ (17)$$ olduğundan

$4^{3n+1} + 13^{n+1}$, 17 ile tam bölünür çünkü kalan 0

olur.

3 b) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{a+3\mathbb{Z} \mid a\in\mathbb{Z}\} = \{0+3\mathbb{Z}, 1+3\mathbb{Z}, 2+3\mathbb{Z}\}$

$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{a+6\mathbb{Z} \mid a\in\mathbb{Z}\} = \{0+6\mathbb{Z}, 1+6\mathbb{Z}, 2+6\mathbb{Z}, 3+6\mathbb{Z},$
$4+6\mathbb{Z}, 5+6\mathbb{Z}\}$

$\dfrac{\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}} = \{a+3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \mid a\in\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\}$
$= \{0+3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, 1+3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, 2+3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\}$

Çünkü $3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{a+6\mathbb{Z} \mid a\in 3\mathbb{Z}\} = \{6\mathbb{Z}, 3+6\mathbb{Z}\}$ olur.

4) a) $f : (G/H, +) \to (G/M, +)$ dönüşümünü

$\forall a+H \in G/H$ için $f(a+H) = a+M$ ile tanımlayalım.

Kapalılık : $\forall a+H\in G/H \Rightarrow a\in G \Rightarrow a+M\in G/M$ olup f kapalıdır

İyi tanımlılık : $\forall a_1+H, a_2+H \in G/H$ için $a_1+H = a_2+H$ olsun.

$a_1+H = a_2+H \Rightarrow a_1-a_2\in H$
$\overset{H\leq M}{\Rightarrow} a_1-a_2\in M$
$\Rightarrow a_1+M = a_2+M$
$\Rightarrow f(a_1+H) = f(a_2+H)$ olup f iyi tanımlıdır

Homomorfizma : $\forall a_1+H, a_2+H\in G/H$ için

$f((a_1+H)+(a_2+H)) = f((a_1+a_2)+H)$
$= (a_1+a_2)+M$
$= (a_1+M)+(a_2+M)$
$= f(a_1+H)+f(a_2+H)$ olup f

homomorfizmadır

4) b) $\mathbb{Z}_{25}^{*} = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24\}$

olup 20 elemanlıdır. Öncelikle üreteçlerine bakalım.

$1^1 = 1$
$1^2 = 1$

$2^1 = 2$
$2^2 = 4$
$2^3 = 8$
$2^4 = 16$
$2^5 = 7$
$2^6 = 14$
$2^7 = 3$
$2^8 = 6$
$2^9 = 12$
$2^{10} = 24$
$2^{11} = 23$
$2^{12} = 21$
$2^{13} = 17$
$2^{14} = 9$
$2^{15} = 18$
$2^{16} = 11$
$2^{17} = 22$
$2^{18} = 19$
$2^{19} = 13$
$2^{20} = 1$

$o(2) = 20$ olup 2 üretir.

$\mathbb{Z}_{25}^{*} = \langle 2 \rangle$ ise $\mathbb{Z}_{25}^{*}$ devirlidir.

5) G bir grup, $H \leq G$ olsun.
$N(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ ile tanımlanır
Şimdi de $H \trianglelefteq N(H)$'a bakalım. Öncelikle

- $H \leq N(H)$ olur mu?
$H \leq G$ olduğu bilindiğine göre $H \subseteq N(H)$ olduğu gösterilirse $H \leq N(H)$ bulunmuş olur. O halde keyfi bir $h \in H$ alalım. $H \leq G$ old. $h \in G$ ve $h^{-1} \in H$ olup $hH = H$ ve dolayısıyla $hHh^{-1} = H$ olup $h \in N(H)$ bulunur.
Yani $H \subseteq N(H)$ olup $H \leq N(H)$ dır.

- Şimdi de $H \trianglelefteq N(H)$ olur mu? Araştıralım
$\forall g \in N(H)$, $\forall h \in H$ için $ghg^{-1} \in H$ olur mu?
$g \in N(H) \Rightarrow gHg^{-1} = H \Rightarrow \forall h \in H$ için $ghg^{-1} \in H$ olduğu açıktır. O halde $H \trianglelefteq N(H)$ bulunur.